1a. $E(x).2\pi xL = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{2\pi rL\sigma}{\varepsilon_0} \rightarrow E(x) = \frac{\sigma r}{\varepsilon_0 x}$

b. $V(R) - V(r) = -\int E(x).dx = -\frac{\sigma r}{\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}$ met VR) = 0 volgt: $V(r) = \frac{\sigma r}{\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}$

c. $C = \frac{Q}{V} = \frac{2\pi rL\sigma}{\frac{\sigma r}{\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r}} = \frac{2\pi L\varepsilon_0}{\ln\frac{R}{r}}$

d. $W = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}.2\pi rL\sigma.\frac{\sigma r}{\varepsilon_0}\ln\frac{R}{r} = \frac{\pi L}{\varepsilon_0}\sigma^2 r^2\ln\frac{R}{r}$

e. $\frac{dV}{dr}\Big|_{r_1} = 0$ levert $\frac{\sigma}{\varepsilon_0}[\ln\frac{R}{r_1} - 1] = 0$ zodat $\frac{R}{r_1} = e$ en $s = 1/e$

f. $V(R/e) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 e}$

2a. De stroom loopt van Q naar P; het door I opgewekte veld is tegengesteld aan uitwendige veld.

b. De Lorentz-kracht is B.I.a ; evenwicht betekent: $BIa.a\sin\theta = mg.\frac{1}{2}a\sin\theta$ zodat $I = \frac{mg}{2Ba}$

c. De flux is $\Phi = B.a^2.\cos\theta$

d. $IR = \frac{mgR}{2Ba} = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right| = \left|\frac{d}{dt}(Ba^2\cos\theta)\right| = Ba^2\sin\theta.\frac{d\theta}{dt} = Ba^2\sin\theta.\omega$

zodat $\omega = \frac{mgR}{2B^2a^3}.\frac{1}{\sin\theta}$

e. $t = \int_0^\pi \frac{d\theta}{\omega} = \int_0^\pi \frac{2B^2a^3}{mgR}\sin\theta\, d\theta = \frac{4B^2a^3}{mgR}$

3a. De stroom van A naar D, van C naar B en van F naar B is I_1 ; die van D naar H, van G naar F en van G naar C is I_2 ; van E naar F en van D naar C is $I_1 - I_2$; die van H naar G is $2I_2$

b. $V_E = V_A - I_1R = V_0 - I_1R$; $V_F = V_B + I_1R = I_1R$; $V_H = V_E - I_2R = V_0 - (I_1 + I_2)R$;
$V_G = V_F + I_2R = (I_1 + I_2)R$

c. $(I_1 - I_2)R = V_E - V_F = V_0 - 2I_1R \rightarrow I_2 = 3I_1 - \frac{V_0}{R}$

d. $2I_2R = V_H - V_G = V_0 - 2(I_1 - I_2)R \rightarrow I_2 = \frac{V_0}{4R} - \frac{I_1}{2}$

e. substitutie van I_2 levert: $I_1 = \frac{5}{14}\frac{V_0}{R}$

4a. $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi}.\left(\frac{1}{x - \frac{D}{2}} - \frac{1}{x + \frac{D}{2}}\right) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}.\frac{D}{x^2 - \frac{D^2}{4}}$

b. $B = 2.\frac{\mu_0}{2\pi}.\frac{I}{\sqrt{y^2 + \frac{D^2}{4}}}.\boxed{\frac{\frac{D}{2}}{\sqrt{y^2 + \frac{D^2}{4}}}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}.\frac{D}{y^2 + \frac{D^2}{4}}$ 9

c. Zowel in het vlak als loodrecht op het vlak geldt: $B \approx 2.10^{-7}.1.\frac{0,004}{1^2} = 8.10^{-10}$ T

UITWERKING tentamen E&M_1 20 08 1997

1a. $\oint \vec{E}.d\vec{S} = \dfrac{Q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E.4\pi r^2 = \dfrac{Q.\dfrac{r^3}{R^3}}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad E(r) = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{r}{R^3}$

b. $V(R) = 0$; zodat $V(r) = -\int_R^r E(r).dr = -\dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\dfrac{r^2}{R^3}\Big|_R^r = \dfrac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(1 - \dfrac{r^2}{R^2}\right)$?

c. De lading dQ in elke schil met straal r en dikte dr heeft een energie $dE = V(r).dQ$ zodat:

$$E = \int V(r).dQ = \int \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right).4\pi r^2 dr.\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^4}\int_0^R \left(r^2 - \frac{r^4}{R^2}\right)dr = \frac{Q^2}{20\pi\varepsilon_0 R}$$

2a. Op het boloppervlak geldt $V(R) = 0$ zodat: $AR + \dfrac{B}{R^2} = 0 \quad \rightarrow \quad B = -AR^3$

b. z heel groot: $V(r,0) \approx Ar$ tevens geldt: $E_0 = E = -\dfrac{\partial V}{\partial r} = -A \quad \rightarrow \quad A = -E_0$

met $B = -AR^3$ volgt: $B = E_0 R^3$

c. Vlak bij de bol geldt:

$$\sigma(R,\theta) = \varepsilon_0 E(R,\theta) = -\varepsilon_0 \frac{\partial V}{\partial r}\Big|_{R,\theta} = \varepsilon_0 E_0\left(1 + 2\frac{R^3}{r^3}\right)\cos\theta\Big|_{R,\theta} = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta$$

d. Verdeel de bol in ringen loodrecht op de z-as. Op een ring met hoek θ zit een lading dq met een dipoolmoment $dp = dq.\overset{\hookrightarrow R}{r}\cos\theta$.

Voor de lading geldt: $dq = \underbrace{2\pi R\sin\theta}_{\text{lengtering}}\underbrace{R d\theta}_{\text{diktering}}\sigma(R,\theta) = 6\pi\varepsilon_0 E_0 R^2 \sin\theta\cos\theta\, d\theta$

Het dipoolmoment is dan:

$(\pi/2)$ anders $p = 2ql$

$$p = \int_0^{\pi/2} 6\pi\varepsilon_0 E_0 R^3 \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = -2\pi\varepsilon_0 E_0 R^3 [\cos^3\theta]_0^{\pi/2} = 2\pi\varepsilon_0 E_0 R^3$$

3a. Uit $\oint \vec{B}.d\vec{l} = \mu_0 I$ volgt voor de linker rail: $B(y) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi(a+y)}$

en voor de rechter rail: $B(y) = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi(a-y)}$

de velden staan in dezelfde richting, zodat het totaal wordt: $B(y) = \dfrac{\mu_0 I a}{\pi(a^2 - y^2)}$

b. $$\Phi = \int B\, dA = \int_{-a+r}^{a-r} \frac{\mu_0 I a}{\pi(a^2-y^2)} b\, dy = \frac{\mu_0 I b}{\pi}\frac{1}{2a}\left[\ln\left|\frac{a+y}{a-y}\right|\right]_{-a+r}^{a-r} = \frac{\mu_0 I b}{\pi}\ln\left|\frac{2a-r}{r}\right|$$

c. De Lorentz-kracht op de draad is: $F = \int B I\, dy = \int \dfrac{d\Phi}{b} I = \dfrac{\Phi I}{b}$